Clase 9: Extremos de funciones con valores reales

C.J. Vanegas

27 de abril de 2008

Estudiaremos algunos técnicas para encontrar máximos y mínimos de funciones de n-variables

1. puntos extremos

Son puntos en los que la función alcanza su valor máximo y mínimo globales o locales.

Definición 1. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Decimos un punto $\overline{x}_0 \in U$ *es un punto mínimo local de* f *si existe un entorno* V *de* $\overline{x}_0$ *tal que para todos los puntos* $\overline{x} \in V$ $\boxed{f(\overline{x}) \geq f(\overline{x}_0)}$.
Análogamente, $\overline{x}_0 \in U$ *es un punto máximo local si existe un entorno* V *de* $\overline{x}_0$ *tal que* $\boxed{f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_0)}$ *para todo* $\overline{x} \in V$.
El punto $\overline{x}_0 \in U$ *es un punto extremo local (o relativo) si es un punto mínimo local o máximo local.*
Un punto $\overline{x}_0$ *es un punto crítico de* f *si* f *no es diferenciable en* $\overline{x}_0$ *o si* $Df(\overline{x}_0) = 0$.
Si un punto crítico no es un punto extremo local decimos que es un punto silla.

2. Condición de la primera derivada para puntos extremos locales

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto,* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable y* $\overline{x}_0 \in U$ *un punto extremo local, entonces* $Df(\overline{x}_0) = 0$*, es decir* $\overline{x}_0$ *es un punto crítico de* f.
En otras palabras: <u>*Todo punto extremo es un punto crítico.*</u>

Demostración : Supongamos que $\overline{x}_0$ es un máximo (mínimo) local de f.
Consideramos la función $g(t) = f(\overline{x}_0 + t\overline{h}) \quad \forall \overline{h} \in \mathbb{R}^n$. Observamos que g tiene un máximo (mínimo) local en $t = 0$ lo que implica que $g'(0) = Df(\overline{x}_0)\overline{h} = 0 \quad \forall \overline{h} \in \mathbb{R}^n$, así $Df(\overline{x}_0) = 0$. $\square$

Observación 1. $Df(\overline{x}_0) = 0, \quad f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = 0 \quad \forall i \Rightarrow \bigtriangledown f(\overline{x}_0) = \overline{0}.$

Al igual que en el cálculo de una variable, buscamos los puntos extremos entre los puntos críticos.

Ejemplo 1. *Hallar los puntos máximos y mínimos de* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$

Solución 1. *Puntos críticos*
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) = 0\,; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y-2) = 0$ *así* $2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *y* $2(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ *Sólo hay un punto críticos:* $(1,2)$ *Como* $f(x,y) \geq 0$ *y* $f(1,2) \geq 0$, *entonces* $(1,2)$ *es un punto mínimo local, de hecho el es un punto mínimo global de* f.
Como $(1,2)$ *es el único punto críticos no hay puntos máximos.*

Ejemplo 2. *Hallar todos los puntos críticos de* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 27x - 124$

Solución 2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 27 = 0\,; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0$ *así* $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ *e* $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$
Puntos críticos $(3,2)$, $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$

3. Criterios de la segunda derivada para los puntos extremos locales.

Recordemos: Para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenemos:
si $f''(x_0) > 0$ entonces x_0 es un punto mínimo
si $f''(x_0) < 0$ entonces x_0 es un punto máximo
para poder generalizar este criterio para funciones de varias variables necesitamos algunas definiciones.

3.1. Definición de forma cuadrática (F.C)

Las (F.C) son funciones $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma $g(h_1, ..., h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$ donde (a_{ij}) es un matriz $n \times n$.

Podemos escribir $g(\overline{h})$ en forma matricial con $\overline{h} = (h_1, ...h_n)$

$$g(\overline{h}) = \begin{pmatrix} \overline{h} \end{pmatrix}_{1\times n} \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} \overline{h} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Por ejemplo si $n = 2$ entonces

$g(h_1, h_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}h_ih_j = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1a_{11}h_1 + h_1a_{12}h_2 + h_2a_{21}h_1 + h_2a_{22}h_2$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $[aij]$ simétrica, es decir $a_{ij} - a_{ji} = 0$. Basta reemplazar $[aij]$ por la matriz $[bij] = \frac{1}{2}[a_{ij} + a_{ji}]$.

Por ejemplo

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + h_2^2 - 3h_1h_2 + 2h_1h_3 - h_3^2 = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Una (F.C) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice definida positiva si $g(\overline{h}) \geq 0 \, \forall \overline{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\overline{h}) = 0$ sólo para $\overline{h} = \overline{0}$. Similarmente, g es definida negativa si $g(\overline{h}) \leq 0 \, \forall \overline{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\overline{h}) = 0$ sólo para $\overline{h} = \overline{0}$.

Por definición $g(\lambda\overline{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda h_i\lambda h_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda^2 h_ih_j = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j = \lambda^2 g(\overline{h})$. y esta identidad refleja la naturaleza cuadrática de g.

Definición 2. *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)$ continuas para todo $i, j = 1, ..., n$, La Hessiana de f en $(\overline{x}_0)$, es la forma cuadrática definida por: $Hf(\overline{x}_0)\overline{h} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)h_ih_j$*

$$= \frac{1}{2}\left(\ \overline{h} \ \right)_{1\times n} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} (\overline{x}_0)_{n\times n} \left(\ \overline{h} \ \right)_{n\times 1} \ donde \ \overline{h} = (h_1, ..., h_n)$$

Observe que por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, la matriz de las derivadas es simétricas.

Esta función (la Hessiana) se usa por lo general en puntos críticos $\overline{x}_0 \in U$. en ese caso $Df(\overline{x}_0) = 0$ lo que implica que la fórmula de Taylor se puede escribir de la forma: $f(\overline{x}_0 + \overline{h}) = f(\overline{x}_0) + Hf(\overline{x}_0)\overline{h} + R_2(\overline{x}_0, \overline{h})$, es decir en un punto críticos la hessiana es igual al primer término no constante de Taylor de f.

Si $n = 1$ $Hf(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$ que es definida positiva si $f''(x_0) > 0$ y negativa si $f''(x_0) < 0$.

3.2. Criterio del hessiano

Teorema 1. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es C^3,$\overline{x}_0 \in U$ un punto críticos de f y $Hf(\overline{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\overline{x}_0$ es un punto mínimo relativo de f. Análogamente si $Hf(\overline{x}_0)$ es definida negativa entonces $\overline{x}_0$ es un máximo relativo.*

Los extremos obtenidos con este criterio son estrictos. esto es:

$f(\overline{x}) < f(\overline{x}_0) \leftarrow \overline{x}_0$ *es máximo estricto si* $\overline{x} \sim \overline{x}_0$

$f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0) \leftarrow \overline{x}_0$ *es mínimo estricto si* $\overline{x} \sim \overline{x}_0$

Lema 1. *Si $B = (b_{ij})_{n\times n}$ y su (F.C) asociada es: $H(h_1, ..., h_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}h_ih_j$ es definida positiva entonces $\exists M > 0 : \forall \overline{h} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $H(\overline{h}) \geq M\|h\|^2$*

Demostración : Para $\|\overline{h}\| = 1$, tome $g(\overline{h}) = H(\overline{h})$. Entonces g es una función continua de $\overline{h}$ para $\|\overline{h}\| = 1$ y por lo tanto alcanza su valor mínimo digamos M. Como H es cuadrática se tiene:

$H(\overline{h}) = H(\dfrac{\overline{h}}{\|\overline{h}\|}\|\overline{h}\|) = H(\dfrac{\overline{h}}{\|\overline{h}\|})\|\overline{h}\|^2 = g(\dfrac{\overline{h}}{\|\overline{h}\|})\|\overline{h}\|^2 \geq M\|\overline{h}\|^2$ para cualquier $\overline{h} \neq \overline{0}$. Si $\overline{h} = 0$ se sigue inmediatamente el resultado.

Observe que la (F.C) asociada con la matriz simétrica $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ es exactamente la hessiana

$\square$

Demostración : del teorema 1

Como $\overline{x}_0$ es un punto críticos $Df(\overline{x}_0) = 0$ entonces el teorema de Taylor se escribe:

$f(\overline{x}_0+\overline{h})-f(\overline{x}_0) = Hf(\overline{x}_0)(\overline{h})+R_2(\overline{x}_0,\overline{h})$, donde $\dfrac{R_2(\overline{x}_0,\overline{h})}{\|\overline{h}\|} \to 0$ cuando $\overline{h} \to 0$ como $Hf(\overline{x}_0)$ es definida positiva entonces $\exists M > 0$ tal que $\forall \overline{h} \in \mathbb{R}^n : Hf(\overline{x}_0)(\overline{h}) \geq M\|\overline{h}\|^2$.
Como $\dfrac{R_2(\overline{x}_0,\overline{h})}{\|\overline{h}\|} \to 0$ cuando $\overline{h} \to 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < \|\overline{h}\| < \delta$ se tiene que $\dfrac{|R_2(\overline{x}_0,\overline{h})|}{\|\overline{h}\|^2} < M \Rightarrow |R_2(\overline{x}_0,\overline{h})| < M\|\overline{h}\|^2$ luego $0 < Hf(\overline{x}_0)(\overline{h})+R_2(\overline{x}_0,\overline{h}) = f(\overline{x}_0+\overline{h})-f(\overline{x}_0)$ para $0 < \|\overline{h}\| < \delta$ entonces $f(\overline{x}_0) < f(\overline{x}_0+\overline{h})$ así $\overline{x}_0$ es un punto mínimo relativo (estricto).
La prueba es similar si la hessiana es definida negativa. $\square$

Ejemplo 3. *Determinar los extremos de* $f(x,y) = 4x^2+2y^2-2xy-10y-2x$. ***ver figura 1***

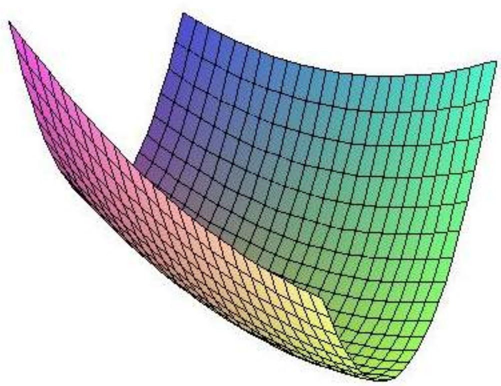

Figura 1: $f(x,y) = 4x^2+2y^2-2xy-10y-2x$

Solución 3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x-2y-2 = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y-2x-10 = 0 \Rightarrow 8x-2y = 2$, $4y-2x = 10$ $\Rightarrow$ $x = 1$, $y = 3$ *así el punto críticos es:* $(1,3)$. *Calculando el hessiano en el punto* $(1,3)$ *tenemos:*

$$Hf(1,3)(\overline{h}) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8h_1 & -2h_2 \\ -2h_1 & 4h_2 \end{pmatrix} = 8h_1^2-2h_2h_1-h_2h_1+4h_2^2 = h_1^2-2h_1(2h_2)+(2h_2)^2+7h_1^2 =$$

$(h_1-2h_2)^2+7h_1^2 > 0$ *es decir* $Hf(1,3)\overline{h}$ *es definida positiva por lo que:*
$(1,3)$ *es un punto mínimo relativo y* $f(1,3) = -16$ *es un mínimo relativo.*

Ejemplo 4. *Sea $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ encuentre los máximos y mínimos de f.* ***ver figura 2***

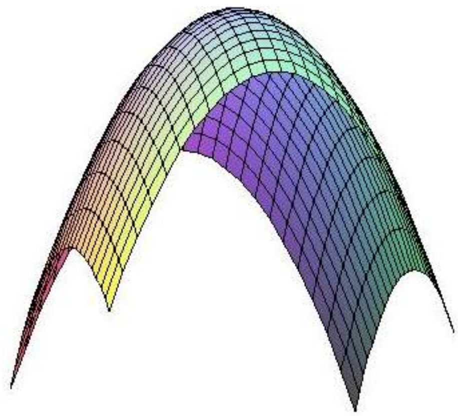

Figura 2: $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

Solución 4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \Rightarrow -2x = 0,\ -2y = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$ *así el punto críticos es:* $(0, 00)$. *Calculando el hessiano en el punto* $(0,0)$ *tenemos:*

$$Hf(0,0)(\overline{h}) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2h_1 \\ -2h_2 \end{pmatrix} = -2h_1^2 - 2h_2^2 < 0 \, \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *es decir* $Hf(0,0)\overline{h}$ *es definida negativa por lo que:*

$(0,0)$ *es un punto máximo relativo y* $f(0,0) = 1$ *es un máximo relativo (absoluto en este caso).*

Lema 2. *Sean* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $(B)_{2\times 2}$ *el hessiano y* $H(\overline{h}) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, *entonces* $H(\overline{h})$ *es definida positiva si y sólo si* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ *y* $detB > 0$.

Demostración : Consideremos $H(\overline{h}) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2\right)$$

$= \dfrac{1}{2}a\left(h_1^2 + \dfrac{2bh_1h_2}{a} + \dfrac{ch_2^2}{a} + \dfrac{b^2h_2}{a^2} - \dfrac{b^2h_2}{a^2}\right) = \dfrac{1}{2}a\left(h_1 + \dfrac{bh_2}{a}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{b^2}{a}\right)h_2^2.$
Si H es definda positiva, es decir si $H(\overline{h}) \geq 0 \forall \overline{h} \in \mathbb{R}^2$, tomando $\overline{h} = (h_1, 0)$, así:
$0 < H(\overline{h}) = \dfrac{1}{2}ah_1^2 \Rightarrow a > 0$. Si tomamos $\overline{h} = (-\frac{b}{a}h_2, h_2)$ obtenemos: $0 < H(\overline{h}) = \dfrac{1}{2}a\left(-\dfrac{b}{a}h_2 + \dfrac{b}{a}h_2\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{b^2}{a}\right)h_2^2 = \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{b^2}{a}\right)h_2^2 \Rightarrow c - \frac{b^2}{a} = \frac{ca-b^2}{a} > 0$ y como $a > 0$ entonces $detB = ca - b^2 > 0$.
Ahora si $a > 0$ y $c - \dfrac{b^2}{a} > 0$ entonces $H(\overline{h}) = \dfrac{1}{2}a\left(h_1 + \dfrac{b}{a}h_2\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{b^2}{a}\right)h_2^2 \Rightarrow H(\overline{h}) > 0$ y $H(\overline{h}) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2 = 0$ por lo que $H(\overline{h})$ es definida positiva.

Observación 2. *Similarmente, se puede ver que $H(\overline{h})$ es definida negativa si y sólo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$.*
Si $a + c > 0$ y $detB > 0$, entonces H es definida positiva. De igual manera:
Si $a + c < 0$ y $detB > 0$, entonces H es definida negativa.

□

4. Criterio de la derivada segunda

Teorema 2. *Sea $f(x, y) \in C^2 \forall (x, y) \in U$ conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$. Decimos que $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ es un punto mini local (estricto) de f si se cumple las tres (3) condiciones siguientes:*

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = 0$ *(i.e $Df(\overline{x}_0) = 0$*
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) > 0$
3. $D = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ *en* $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$

donde D es el discriminante de $Hf(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$. Además si en 2 tenemos < 0 y 1 y 3 ***no cambian****, entonces $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ es un punto máximo local (estricto).*

Demostración : la demostración sale aplicando el Lema anterior y el criterio anterior. □

Observación 3. *Si $D < 0$ entonces $\overline{x}_0$ es un punto silla.*
Si $D = 0$ es necesario hacer un análisis de $f(x, y) \forall (x, y)$ cerca de $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, por ejemplo a través de los conjuntos de nivel, secciones o cualquier otro método. Estos puntos reciben el nombre de ***puntos críticos degenerados****.*

Ejemplo 5. *Para* $x^3+y^3-27x-124$ *en un ejemplo anterior hallamos los siguientes puntos críticos* $(3,2); (3,-2); (-3,2); (-3,-2)$ *vamos a utilizar el criterio anterior para clasificarlos.* ***ver figura 3***

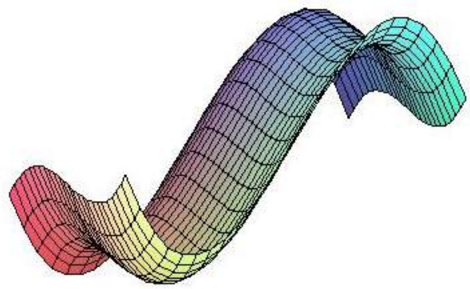

Figura 3: $x^3+y^3-27x-124$

Solución 5. *Vamos a hallar las derivadas parciales*

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}) = 3x^2-27 & \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}) = 3y^2-12 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}) = 6x & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}) = 6y & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}) = 0 \end{array}$$

luego construimos D $D = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 6x6y - 0 = 36xy$ *en* $\overline{x}$.
Vamos a evaluar cada punto y clasificarlo:
$(3,2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) = 18 > 0 \quad D(3,2) = 216 > 0$$

así $(3,2)$ *es un punto mínimo local.*

$(3,-2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-2) = 18 > 0 \quad D(3,-2) = -216 < 0$$

así $(3,-2)$ *es un punto silla.*

$(-3,2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,2) = -18 < 0 \quad D(-3,2) = -216 < 0$$

así $(-3,2)$ *es un punto silla.*

$(-3,-2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,-2) = -18 < 0 \quad D(-3,-2) = 216 > 0$$

así $(-3,-2)$ *es un punto máximo local.*

Ejemplo 6. *Considere la función* $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$*. Hallar los puntos de la superficie* S *determinada por* f*, más cercanos al origen* $\overline{0} = (0,0,0)$*.*

Solución 6. *Sea* d *la distancia de los puntos* $\overline{x} \in S$ *al* $\overline{0}$ *dada por:* $d = \sqrt{((x,y,z)-(0,0,0))^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2y^2}} \Rightarrow d^2(x,y) = x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2y^2}$*. Los puntos mínimos de* $d^2(x,y)$ *que son los mismos puntos mínimos de* $d(x,y)$ *son los puntos de* S *más cercanos al* $\overline{0}$*.*

<u>Puntos críticos</u> $\bigtriangledown d^2(x,y) = 0 \Rightarrow 2x - \dfrac{2}{y^2x^3} = 0,\ 2y - \dfrac{2}{y^2x^3} = 0 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{x^4}$ *sustituyendo en* $y - \frac{1}{x^2y^3} = 0$ *obtenemos:* $x = \pm 1$ *e* $y = \pm 1$ *por lo que los puntos críticos son:* $(1,1);(1,-1);(-1,1);(-1,-1)$ *empleando como en el ejemplo anterior el ultimo criterio, tenemos:*

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2+\dfrac{6}{y^2x^4}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2+\dfrac{6}{x^2y^4}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{16}{y^6x^6}$ *así* $D(x,y) = \left(2+\dfrac{6}{y^2x^4}\right)\left(2+\dfrac{6}{x^2y^4}\right) - \dfrac{16}{y^6x^6}$

Vamos a evaluar cada punto y clasificarlo:

$(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 8 > 0 \quad D(1,1) = 64 - 16 > 0$$

así $(1,1)$ *es un punto mínimo local.*

$(1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 8 > 0 \quad D(3,-2) = 64 - 16 > 0$$

así $(1,1)$ *es un punto mínimo local.*

$(-1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 8 > 0 \quad D(-1,1) = 64 - 16 > 0$$

así $(1,1)$ *es un punto mínimo local.*

$(-1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 8 > 0 \quad D(-1,-1) = 64 - 16 > 0$$

así $(1,1)$ *es un punto mínimo local.*

Luego $d^2(1,1) = d^2(1,-1) = d^2(-1,1) = d^2(-1,-1) = 3$. *Por lo tanto los puntos de* S *más cercanos al* $\overline{0}$ *son de la forma* $(1,1,\dfrac{1}{xy})$ *finalmente:* $(1,1,1); (1,-1,-1); (-1,1,-1); (-1,-1,1)$

Ejemplo 7. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = ax^2 + by^4$. *Determine sus puntos críticos y clasifíquelos*

Solución 7. *Calculamos los puntos críticos*

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2ax; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4by^3 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2ax = 0 = 4by^3 \Rightarrow x = y = 0$ *por lo que el único punto críticos es el* $(0,0)$.

Clasificación del punto crítico

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12by^2; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. *Luego* $D = 24aby^2 \Rightarrow D(0,0) = 0$.

Si $a = b = 1 \Rightarrow f(x,y) = x^2 + y^4$ *y en todo entorno del* $\overline{0}$, $f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0)$ *es un punto mínimo local.*

Si $a = b = -1 \Rightarrow f(x,y) = -x^2 - y^4$ *y en todo entorno del* $\overline{0}$, $f(x,y) = -x^2 - y^4 \leq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0)$ *es un punto máximo local.*

Si $a = -1$ *y* $b = 1 \Rightarrow f(x,y) = -x^2 + y^4$ *y en todo entorno del* $\overline{0}$, *se tienen puntos de la forma* (ϵ, o) *y* $(0,\epsilon)$ *de tal manera que* $f(\epsilon,0) = -x^2 < 0 = f(0,0)$ *y* $f(0,\epsilon) = \epsilon^4 > 0 = f(0,0)$ *entonces el* $(0,0)$ *es un punto de ensilladura.*

5. Máximos y mínimos globales (o absolutos)

Definición 3. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^2$ *o* $A \subset \mathbb{R}^3$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$. *Decimos que* $\overline{x}_0 \in A$ *es un punto maxi absoluto (o mínimo absoluto) de* f *si* $\boxed{f(\overline{x}) < f(\overline{x}_0)}$ *(o* $\boxed{f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)}$*)* $\forall \overline{x} \in A$.

Recordemos: $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua entonces f alcanza su valor máximo (o mínimo) en algún $\overline{x}_0 \in [a,b]$. Trataremos de generalizar este resultado.

Definición 4. *Sea* $D \subset \mathbb{R}^n$ *decimos que* D *es acotado si existe un* $M > 0$ *tal que* $\|\overline{x}\| < M \, \forall \overline{x} \in D$. *(*$D$ *es acotado si esta estrictamente contenido en una bola) Decimos que* D *es cerrado si contiene a todos sus puntos frontera.*

Teorema 3. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado y $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existen puntos $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_1$ de D donde f alcanza sus valores máximos y mínimos*

Observación 4. *Si $D = U \cup \partial U$, U abierto y $D \subset \mathbb{R}^2$. Supondremos que ∂U es una curva suave a trozos. Esto implica que D es una región limitada por una familia de curvas suaves, por ejemplo: Así si $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_1$ están en U entonces, ellos son puntos críticos de f. Si $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_1$ están en ∂U y ∂U es una curva suave entonces, ellos son puntos máximos y mínimos de f considerada f como una función sobre ∂U. Estas observaciones nos ayudan a elaborar un método para hallar máximos y mínimos absolutos de f en una región D.*

5.1. Método

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2$ continua y D es una región cerrada y acotada, que está limitada por una curva cerrada suave. Entonces para hallar el máximos y el mínimos absoluto de f en D hacemos lo siguiente:

i Localizar todos los puntos críticos de f en D.

ii Hallar los puntos críticos de f considerada como una función definida sólo en ∂D.

iii Calcular el valor de f en todos esos puntos críticos.

iv Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y menor.

Observación 5. *Si D es una región limitada por una familia de curvas suaves como por ejemplo, un cuadrado, se sigue un procedimiento análogo pero incluyendo en ii) los puntos donde unen las curvas, en el caso del cuadrado; las esquinas.*
Una forma de cumplir con ii) en el plano es hallar una parametrización suave de ∂D, i.e, hallar una trayectoria $c : I \to \partial D$, I = intervalo.
Otra forma de cumplir con ii) es aplicando e método de multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 8. *Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. Encontrar el máximo y el mínimo absoluto de f en la región triangular R que tiene como vértices $(-1, -1); (7, -1)$ y $(7, 7)$.* ***ver figura 4***

Solución 8. *Según el método expuesto anteriormente tenemos:*

i)

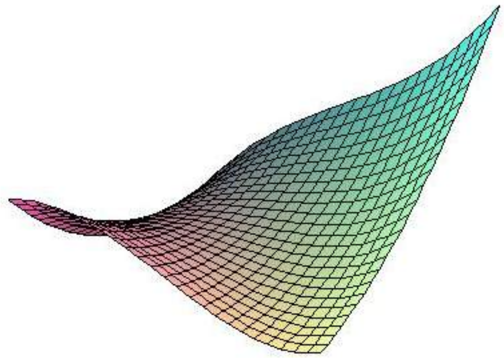

Figura 4: $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 4y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4x + 3y^2 + 4 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -4x + 3y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema siguiente: $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ *Se obtiene:* $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ *y*

$x_2 = \frac{4}{3}$, $y_2 = \frac{2}{3}$. *Así los puntos críticos en el interior del triángulo son:* $(4,2)$ *y* $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

Clasificando los puntos críticos

Calculemos D.

$\dfrac{\partial f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y^2} = 6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y} = -4$, *por lo que* $D(\overline{x}) = 124 - 16$. *En* $(4,2)$ *tenemos:* $\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y} > 0$ *y* $D(4,2) = 8 > 0$ *así* $(4,2)$ *es un punto mínimo local. Por otro lado para* $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ *tenemos:* $\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y} > 0$ *y* $D(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = -8 < 0$ *así* $(4,2)$ *es un punto de silla.*

$f(4,2) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y \mid_{(4,2)} = 0$.

ii)

$\partial R = c_1 \cap c_2 \cap c_3$

<u>c_1 :</u>

$c_1(t) = (t, -1)$, $-1 \leq t \leq 7$ $g_1(t) = f(c_1(t)) = f(t, -1) = t^2 + 4t - 1 - 4 = t^2 + 4t - 5$ $g_1'(t) = 2t + 4$, $g_1'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$; *como* $t = -2 \notin [-1, 7]$, *no hay puntos extremos locales en* $[-1, 7]$ *como* $f(c_1(t))$ *es creciente en todo este intervalo el mínimo y el* *máximo en la frontera son* $g(-1) = f(-1,-1) = -8$ *y* $g(7) = f(7,-1) = 72$.

$\underline{c_2:}$

$c_2(t) = (7,t)$, $-1 \leq t \leq 7$ $g_2(t) = f(c_2(t)) = f(7,t) = 49 - 28t + t^3 + 4t = 49 - 24t + t^3$ $g_2'(t) = -24 + 3t^2$, $g_2'(t) = 0 \Leftrightarrow -24 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{8}$; *pero como* $t = -\sqrt{8} \notin [-1,7]$, *así que solo se considera* $t = \sqrt{8}$; $g_2''(t) = 6t \mid_{t=\sqrt{8}} = 6\sqrt{8} > 0 \Rightarrow t = \sqrt{8}$ *es un punto mínimo local para* $g_2 \Rightarrow (7,\sqrt{8})$ *es un punto mínimo local de* f *en* c_2.

$f(7,\sqrt{8}) = 49 - 32\sqrt{2} = 3,7$. *Los valores de* f *en los extremos de* c_2 *son:* $f(7,-1) = 72$ *y* $f(7,7) = 224$.

$\underline{c_3:}$

$c_3(t) = (t,t)$, $-1 \leq t \leq 7$ $g_3(t) = f(c_3(t)) = f(t,t) = t^2 - 4t^2 + t^3 + 4t = -3t^2 + t^3 + 4t$ $g_3'(t) = -6t + 3t^2 + 4$, $g_3'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 3t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{6 \pm \sqrt{-12}}{6}$ *no hay raíces reales, por lo que no hay puntos críticos para* $g_3(t)$ *y por consiguiente tampoco para* f *en* c_3.

$f(-1,-1) = -8$ *y* $f(7,7) = 224$.

iii)

$$\left\{ \begin{array}{cc} f(4,2) = 0 & \textit{mínimo local en } \mathbb{R} \\ f(-1,-1) = -8 & \textit{mínimo absoluto de } f \textit{ en } \mathbb{R} \\ f(7,-1) = 72 & \textit{máximo local de (o máximo absoluto de } f \textit{ en } c_1 \textit{)} \\ f(7,\sqrt{8}) = 3,7 & \textit{mínimo local en } c_2 \\ f(7,7) = 224 & \textit{máximo absoluto de } f \textit{ en } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Fin $\perp$